
第0章 绪论

张量分析与连续介质力学

从质点、刚体到连续介质

物理实体 · 坐标分量 · 张量变换

徐翱 景泽 编著

面向连续介质力学与工程应用的桥梁课程

学习目标

知识目标

- 理解连续介质假设及其适用尺度
- 掌握张量的物理意义与阶次概念
- 区分物理实体、坐标分量与变换法则
- 理解张量不变量的力学含义

能力目标

- 能根据工程问题选择合适的力学模型
- 能判断一组分量是否构成张量
- 能解释坐标变换下分量的变化规律
- 能将张量工具与后续力学课程建立关联

素养目标

- 建立从“物理图像”到“数学表达”再到“工程应用”的思维方式
- 培养严谨建模意识与数值可靠性观念，理解工程安全与力学基础的内在联系

教学重点与难点

教学重点

- 连续介质假设的物理内涵
- 张量作为多方向耦合线性算子的本质
- 柯西应力公式 $t^{(n)} = \sigma \cdot n$ 的物理意义
- 张量分量在正交变换下的变换法则
- 张量不变量及其力学解释
- 完整分量数与独立分量数的区分

教学难点

- 物理实体与坐标分量的层次区分
- "张量不变"不等于"分量不变"
- 坐标不变性与材料客观性的联系与区别
- 数组维数与张量阶次的本质差异

工程问题导入：一架飞行器需要多少种模型？

大型客机在飞行中遭遇非定常气动载荷：柔性机翼产生弯曲与扭转，蒙皮和梁结构内部形成随空间变化的应力应变；发动机和机翼周围气流不断发生压缩、膨胀、剪切和旋转。

同一个研究对象，不同的问题需要不同的模型

研究整体轨迹

质点模型即可

关注：质量、位置、速度

忽略：尺寸、姿态、内部变形

研究姿态变化

需要刚体模型

关注：尺寸、姿态、转动惯量

忽略：局部应变和应力分布

研究变形与流场

必须连续体模型

关注：位移、应力、温度等空间场

需要张量描述多方向耦合

从质点到连续体的建模层级

从质点到连续体：建模信息与计算复杂度

同一架飞行器 · 建模分辨率由低到高 · 研究目标由轨迹扩展到气动与结构场



质点模型：忽略尺寸，只保留平动状态

定义与特征

- 具有质量，忽略几何尺寸
- 位置由有限个坐标描述
- 外力合成为一个力矢量
- 运动遵循牛顿第二定律

核心方程

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

矢量方程：力、加速度均为一阶张量（矢量）
质量 m 为零阶张量（标量）

适用条件

当研究对象的尺寸相对于运动尺度可以忽略，且内部变形不影响所关心的运动特征时，可以采用质点模型。例如：飞行轨迹估算、弹道计算。

刚体模型：保留尺寸与姿态，忽略内部变形

定义与特征

- 具有有限尺寸与转动惯量
- 任意两物质点间距离保持不变
- 可发生平动和转动
- 不发生形状或体积变化

运动描述

- 平动：质心位置 $r(t)$
- 转动：姿态矩阵 $R(t)$ 或欧拉角
- 转动方程： $M = I \cdot \alpha$
- 惯性张量 I 为二阶张量

适用范围与局限

适合分析结构整体运动（如飞行器姿态、机构运动），但不能描述材料内部的局部变形、应力分布和流场演化。注意：转动方程 $M = I \cdot \alpha$ 中惯性张量 I 已经是二阶张量。

模型选择的核心逻辑：由输出量决定

明确研究问题关心的输出量 → 选择保留最少必要信息的模型

"飞机飞到哪里"

输出：位置坐标
模型：质点轨迹
3个平动自由度

"飞机朝向哪里"

输出：姿态角
模型：刚体姿态
6个自由度

"机翼是否颤振"

输出：应力/变形场
模型：连续体场
无穷多自由度

关键原则

不宜简单区分为"正确模型"与"错误模型"。够用即可的模型降低计算代价，过度精细的模型可能引入不必要的复杂度和数值误差。

建模层级对比：信息保留与计算代价

建模对象	主要保留的信息	主要忽略的信息	典型工程问题
质点	质量、位置、速度、加速度	尺寸、姿态、内部变形	飞行轨迹、弹道估算
刚体	尺寸、姿态、转动惯量、整体运动	局部应变和内部应力分布	飞行器姿态、机构运动
连续体	密度、速度、位移、温度、应力等空间场	原子或分子的逐个运动	结构强度、流场、传热和波传播

模型保留的信息越丰富，能回答的问题越多，但场变量、控制方程、边界条件和计算代价也相应增加。模型选择首先应明确研究问题所关心的输出量。

以下工程问题分别适合哪种模型？

A

计算卫星从发射到入轨的飞行轨迹

B

分析汽车转弯时的侧翻稳定性

C

评估飞机机翼在气动载荷下的应力分布

D

模拟发动机燃烧室中的湍流燃烧过程

请选择：质点 / 刚体 / 连续体，并说明判断依据。

连续介质假设：从微观离散到宏观连续

微观现实

- 固体和流体由离散原子/分子组成
- 粒子数量巨大，逐一追踪不现实
- 微观运动具有随机性和涨落



宏观处理

- 采用尺度平均的观点
- 将物质视为连续分布
- 用局部平均量取代单个粒子描述

适用条件

所考察的空间尺度远大于分子平均间距和其他微观特征尺度。此时密度、速度、温度等物理量可表示为空间位置与时间的连续函数，从而能够运用多元微积分、偏微分方程和积分守恒定律。

连续介质的场变量表示

在连续介质假设下，物理量不再是有限个数值，而是定义在整个空间域上的场函数：

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$$

密度场（标量场 · 零阶张量场）

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

速度场（矢量场 · 一阶张量场）

连续介质力学需要研究的核心问题

- 材料内部接触力的传递（应力张量）
- 微小线段和微元体的伸长、剪切与转动（应变张量、速度梯度张量）
- 质量、动量和能量在空间中的输运（守恒定律）
- 局部物理规律如何共同构成整体守恒关系（积分定理）

以下哪些场景中连续介质假设可能失效？

- A. 常温常压下管道内的水流
- B. 100 km 高空稀薄气体中卫星的气动加热
- C. 特征尺寸为 100 nm 的微纳流体器件中的流动
- D. 大型桥梁在车辆荷载下的应力分析

判断依据是什么？请用"特征尺度与分子平均间距的比值"解释。

同一物理量，不同分量：风速的例子

观测者 A：基底 (e_1, e_2)

e_1 指向正东， e_2 指向正北

风向：正东 10 m/s

分量： $[v_1, v_2] = [10, 0]$ m/s

观测者 B：基底 (e'_1, e'_2)

相对 A 逆时针旋转 45°

被动坐标变换约定

分量： $[v'_1, v'_2] = [7.07, -7.07]$ m/s

关键观察

- 两组分量数值不同： $[10, 0] \neq [7.07, -7.07]$
- 但它们描述的是同一个空间矢量——风本身没有变
- 模长保持不变： $\|v\| = \sqrt{v_i v_i} = 10$ m/s（标量不变量）

理解张量的三个层次

第一层：物理实体

客观存在的标量、矢量或张量
不依赖坐标系选择
如风本身、应力状态本身

第二层：坐标分量

相对于选定基底的数值表示
随基底改变而变化
如 $[10, 0]$ 或 $[7.07, -7.07]$

第三层：变换法则

不同基底分量间的确定关系
由基底间几何关系唯一决定
如 $v' = Qv$

张量由变换法则界定：排列成矩阵或多维数组的数值集合不必然构成力学张量。只有分量在基底改变时服从相应阶次的坐标变换法则，才可视为同一几何/物理实体在不同坐标系下的表示。

坐标系旋转后，哪些量发生了改变？

A. 物理矢量本身（如风的大小和方向）

B. 矢量的分量数值 $[v_1, v_2]$

C. 矢量的模长 $\|v\|$

D. 基底矢量 (e_1, e_2)

请分别判断：改变 / 不改变，并说明理由。

课程定位：基础数学与连续介质力学之间



本课程不替代基础数学，而是将它们组织成适合处理连续体多方向物理关系的统一语言

第二章

指标记法、克罗内克符号、列维-奇维塔符号——紧凑表达守恒方程

第四章

梯度、散度、旋度——建立局部控制方程的数学基础

第五章

积分定理——连接局部微分方程与整体守恒关系

与固体力学的联系

材料力学 → 弹性力学 → 塑性力学，张量分析是贯穿三者的共同数学基础

第一章：柯西面力与应力张量

通过柯西面力 $t = \sigma \cdot n$ 建立应力张量，将材料力学的二维应力分析推广到三维

第三章：主值、主方向与不变量

张量不变量为主应力、应力分解提供统一框架，为弹性力学广义胡克定律奠定基础

塑性力学中的应用

- von Mises 屈服准则基于偏应力张量第二不变量 J_2
- Tresca 屈服准则基于最大切应力（主应力之差）
- 四阶弹性张量 C_{ijkl} 描述应力与应变的多方向本构耦合

与流体力学的联系

速度梯度张量是流体力学的核心数学工具，统一描述变形、旋转和体积变化

第四章：速度梯度分解

$$L = D + W$$

对称部分 D ：应变率

反对称部分 W ：旋转率

散度与旋度

$\nabla \cdot \mathbf{v}$ ：局部体积变化率

$\nabla \times \mathbf{v}$ ：涡量

局部角速度 = $\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})$

第五章：积分定理

高斯定理：通量与散度

斯托克斯定理：环量与旋度

连接局部与整体守恒

常见误解

流体微元的局部角速度等于涡量的一半 ($\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$)，而非涡量本身。这一区别来自反对称张量 W 与轴矢量的对应关系。

与计算力学的联系

张量分析的数学结构直接对应数值计算中的数据结构和算法

张量缩并 → 矩阵运算

$\sigma_{ij}n_j \rightarrow$ 矩阵向量乘
有限元刚度矩阵组装

梯度散度 → 离散微分算子

有限差分/有限体积法
梯度矩阵、散度矩阵

积分定理 → 通量平衡

有限体积法通量守恒
有限元法弱形式

课程中 Python 代码展示数学结构如何转化为可执行数值或符号计算。掌握张量分析 $\neq$ 掌握仿真软件，但有助于理解控制方程、材料模型和离散算法的数学基础。

建议学习路径

物理对象 → 代数语言 → 场论运算 → 积分守恒 → 曲线坐标



一学分课程建议

- 优先掌握：各章基本定义、核心公式、基础例题、章节小结
- 拓展内容：较长证明、开放性问题、复杂曲线坐标推导、综合计算项目

教材的模块化阅读方式

四类提示框贯穿全书，分别承担不同的教学功能

物理映射 (callout-note)

说明数学对象对应的力学含义

如：速度梯度迹 = 局部体积变化率

应力张量把法向映射为面力矢量

概念辨析 (callout-important)

区分易混淆的符号、约定和物理概念

如：自由指标与哑指标

主动旋转与被动坐标变换

工程例题 (callout-warning)

从工程情境到张量模型的推导过程

含假设、坐标选择、张量表达、结果解释

数字赋能 (callout-tip)

利用 Python/NumPy/SymPy 验证公式

计算结果与理论推导相互校验

谢谢

张量分析与连续介质力学

第0章 绪论

徐翱 景泽 编著